Exercice 20 :

Soit un entier $n \geq 2$ et $\varphi_n : [0, \frac{\pi}{2}[\to \mathbf{R}$

$$x \mapsto \sqrt[n]{\text{tg}\, x}$$

1°/a) Etudier les variations de φ_n sur $[0, \frac{\pi}{2}[$.

b) Montrer que φ_n est une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}[$ sur un intervalle J à préciser. On note ψ_n la fonction réciproque de φ_n.

c) Déterminer le domaine E′ de dérivabilité de ψ_n.

d) Montrer que $\forall x \in \text{E}'$ on a : $\psi_n'(x) = \frac{n x^{n-1}}{1 + x^{2n}}$.

2°/ Soit N : $[0, \frac{\pi}{2}[\to \mathbf{R}$

$$x \mapsto 1 + \text{tg}^2 x - 2\sqrt{\text{tg}\, x}$$

a) Montrer que N est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et que l'équation $(x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et $\text{N}'(x) = 0)$ admet une unique solution notée x_0.

Calculer $\text{N}(x_0)$.

b) En déduire que l'équation $\text{N}(x) = 0$ admet deux solutions dans $[0, \frac{\pi}{2}[$. (On remarquera que $\text{N}(\frac{\pi}{4}) = 0$).

c) Soit $f : [0, \frac{\pi}{2}[\to \mathbf{R}$

$$x \mapsto \sqrt{\text{tg}\, x} - x$$

Etudier les variations de f. En déduire le signe de $f(x)$.

Exercice 21 :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x} & \text{pour } x > 0 \\ f(x) = \dfrac{x}{2\sqrt{x^2+1}} & \text{pour } x \leq 0 \end{cases}$$